



TITLE:

# Thin Set上の測度について (Fourier解析の研究報告集)

AUTHOR(S):

佐伯, 貞浩

---

CITATION:

佐伯, 貞浩. Thin Set上の測度について (Fourier解析の研究報告集). 数理解析研究所講究録 1968, 55: 53-62

ISSUE DATE:

1968-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107789>

RIGHT:

# Thin set 上の測度について

都大 理学部 佐伯貞浩

$G$  を locally compact abelian group,  $\Gamma = \hat{G}$  をその dual とする。 $G$  上の任意の測度  $\mu$  に対して,  $\mu^1 = \mu$ ,  $\mu^{n+1} = \mu^n * \mu$  とおく。まず, この主要定理を次の形に述べる。

定理 1. すべての non-discrete locally compact abelian group は, 任意の正整数  $n$  に対して, 次の条件を満たす非負値実測度  $\mu \neq 0$  を持つ:

(a)  $\mu^1, \dots, \mu^n$  はすべて Haar 測度に関して特異な測度である。

(b)  $n$  だけに関係する正整数  $m$  が存在して,  $\mu^m$  は Haar 測度に関して絶対連続である。

証明は §6 で与える。この定理の応用を述べるために,  $G$  上の measure algebra を  $M(G)$  とし, その max. ideal

space を  $\text{Hom}(G)$  とする。又、絶対連続な測度の作る閉 ideal を  $M_a(G)$ , その Fourier 変換  $\hat{\mu}$  が  $\hat{G}$  の外部で 0 となる様な測度  $\mu$  の作る閉 ideal を  $M_v(G)$  とする。

系.  $G$  が non-discrete ならば, 商空間  $M_v(G)/M_a(G)$  は無限次元の Banach 空間である。

証明. 任意の正整数  $n$  に対して, 定理の条件 (a), (b) を満たす測度  $\mu \neq 0$  を取る。もし  $\mu \in \text{Hom}(G) \setminus \hat{G}$  とすれば,  $\hat{\mu}^n(\mu) = (\hat{\mu}(\mu))^n = 0$ 。よって  $\mu \in M_v(G)$ 。又, 条件 (a), (b) より,  $\mu^1, \dots, \mu^n$  は mod  $M_a(G)$  で 1 次独立である。(Q. E. D.).

### §1. 記号, 定義, 及び補助定理.

任意の  $G$  に対して,  $h_G$  はその Haar 測度を表わし,  $G$  が compact のときは常に  $h_G(G)=1$  とする。 $G$  の各元  $x$  に対し  $\delta(x)$  を  $x$  での点測度, 又  $\Delta(x) = \frac{1}{2} \{ \delta(x) + \delta(-x) \}$  とする。 $G$  の任意の集合  $P$ , 及び  $n \in \mathbb{Z}^+$  に対して,

$$n P = \{ \sum_{j=1}^n x_j : x_j \in P, 1 \leq j \leq n \}$$

と定義し,  $|P|$  は  $P$  の濃度を表わす。さらに, 測度  $\mu$  の台を  $S(\mu)$  で表わすことにする。

さて, compact  $G$  で, 次のような部分群の列  $\Sigma$  を含むものを考える:  $\Sigma = \{ G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_m \supset \dots \}$ , かつ

$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ 。この列  $\Sigma$  に対して、確率空間  $(\Omega, B, h)$  を次の様なものとする： $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$ ； $B$  は  $\Omega$  の (位相的) Borel field； $h$  は直積測度  $\bigotimes_{n=1}^{\infty} h_{G_n}$ 。

定義 1.  $\Omega$  の各元  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$  に対して、

$$\mu = \mu_{\omega} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n \in M^+(G)$$

とおく。こゝに  $\mu_n = \Delta(\omega_n)$  であって、convolution の収束は、 $M(G)$  の弱位相で考える。この様な測度  $\mu_{\omega}$  を  $\Omega(\Sigma)$  測度という。

補助定理. 正整数  $n$  に対して、 $\Sigma$  が  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{+n} h_{G_n}(G_{n+1}) = 0$  を満たせば、すべての  $\Omega(\Sigma)$  測度は定理 1 の条件 (a) を満足する。

さて  $n$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$  に対して

$$\sigma(A) = \int_0^1 |\cos 2\pi t|^A dt$$

$$\sigma(A; m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \cos \frac{2\pi}{m} j \right|^A$$

とおく。このとき、 $\sigma(A) = A(A) A^{-\frac{1}{2}}$  とおけば、

$$\lim A(A) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}}, \quad A(A) < (2/\pi)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma(A; m) \leq A(A) A^{-\frac{1}{2}} + 4/m$$

が成り立つ。

最後に、定理 1 の条件 (a), (b) を満たす非負値測度  $\mu$  を

$(k, \lambda)$ 型の測度と呼ぶことにする：ただし  $\mu \neq 0$ 。

§ 2.  $G = \mathbb{R}$  及び  $G = \mathbb{T}$  の場合.

定理 2. 各  $k \in \mathbb{Z}^+$  に対し,  $\lambda (\in \mathbb{Z}^+) < (2/\pi) 4^k + 1$  が存在し,  $G$  は  $(k, \lambda)$  型の測度を持つ。

証明. 与えられた  $k$  に対して, 定数  $C_1$  を

$$J_m[(2/\pi) 4^k] + 1 > C_1^2 (2/\pi) 4^k$$

となるように定める。ここに  $J_m[\alpha]$  は  $\alpha$  の整数部分を表わす。そして, 2つの数列  $\{a_m\}_m^\infty$  と  $\{b_m\}_m^\infty$  を定義する:

$$\begin{aligned} a_m &= (\log 2)^{-1} \log C_1 + m^{-1} (\log 3m)^{-1} \\ b_m &= 2^{-(k+a_m)}. \end{aligned}$$

このとき,  $1 < C_2 < C_1$ ,  $b'_m = C_2 b_m < 1/2$  なる定数  $C_2$  を取る。これらに対して, 確率空間  $(\Omega, B, h)$  を次の標に構成する:  $\Omega = \prod_{n=1}^\infty I_n$ ,  $I_n = [b_n, b'_n]$ ;  $B$  は  $\Omega$  の Borel field;  $h = \bigotimes_{n=1}^\infty h_n$ ,  $h_n$  は  $h_n(I_n) = 1$  なる  $I_n$  上の Lebesgue 測度。そして  $\omega = (\omega_n) \in \Omega$  に対して, 区間  $[0, 1]$  上の測度  $\mu_\omega$  を

$$\hat{\mu}_\omega(\gamma) = e^{i\pi\gamma} \prod_{n=1}^\infty \cos[\pi\gamma \omega_1 \cdots \omega_{n-1} (1 - \omega_n)]$$

によって対応させる。

このとき, 任意の  $\omega \in \Omega$  に対して,  $S(\mu_\omega^k)$  の測度が 0 であること, 及び 任意の  $\lambda > C_1^2 \{A(\lambda)\}^2 4^k$  に対

して,  $E\left(\int_{\hat{G}} |\hat{\mu}_\omega(x)|^4 d\gamma\right) < +\infty$  が示される。この

ことから, 測度  $\mu_\omega$  が a. a.  $\omega \in \Omega$  に対して,  $(k, 1)$  型の測度であることが結論される。(Q. E. D.)

§3.  $G = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_n)$  の場合 (各  $p_n$  は素数,  $p_n < p_{n+1}$ ).

定理3. この場合も, 定理2が成立する。

証明.  $k$  を固定して, 各  $n \in \mathbb{Z}^+$  に対して

$$g_n = \text{Im}[(k \log 2)^{-1} \{ \log(p_1 \cdots p_n) - \log \log 3n \}]$$

とおく。定理を示すには,  $0 = g_0 < g_n < g_{n+1}$  と仮定してよい。これを仮定した上で, 数列  $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$  を

$$K_{g_{n-1}+1} = K_{g_{n-1}+2} = \cdots = K_{g_n} = n$$

で定義し,  $G$  の部分群の列  $\Sigma = \{G_n\}$  を  $G_n = \prod_{K_j \leq g_n} \mathbb{Z}(p_j)$  で定める。

このとき, 各  $\Omega(\Sigma)$  測度  $\mu = \mu_\omega$  に対して  $h_G[S(\mu^4)] = 0$  が示される。更に, 任意の  $\lambda \geq (2/\pi) 4^k$  に対して

$$E\left(\sum_{\gamma \in \hat{G}} |\hat{\mu}(\gamma)|^4\right) < +\infty$$

が示され, 定理の結論を得る。(Q. E. D.)

§4.  $G = \mathbb{U}(p)$  の場合 ( $p$ -adic integer の作る群,  $p$  は任意の素数)。

定理4. この場合も, 定理2が成立する.

証明. 素数  $p$  と  $k \in \mathbb{Z}^+$  を固定し,  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して,

$$K_n = J_n [(\log p)^{-1} \{ (k \log 2) n + \log \log \log e^{e(n+1)} \}]$$

とおく.  $G$  の元  $x$  は

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

—— たゞし, 各  $x_n$  は  $0 \leq x_n \leq p-1$  なる整数 —— という形に一意に書き表わせることに注意して,  $G$  の部分群の列  $\Sigma = \{G_n\}$  を

$$G_n = \{x \in G : x_j = 0, \forall j < K_n\}$$

で定義する.

このとき, 各  $\Omega(\Sigma)$  測度  $\mu = \mu_\omega$  に対して,  $h_G[S(\mu^k)] = 0$  であること, 又, 任意の  $\lambda \geq (2/\pi) 4^{k/2}$  に対して

$$E(\sum_\gamma |\hat{\mu}(\gamma)|^4) < +\infty$$

が示されるから, 定理の結論を得る. (Q.E.D.)

§5.  $G = \prod_{j=1}^{\infty} G^{(j)}$  (すべての  $j$  に対して,  $G^{(j)} = \mathbb{Z}(p)$ :  $p$  は任意の素数).

定理5. 各  $k \in \mathbb{Z}^+$  に対して,  $\lambda = \lambda(k) \in \mathbb{Z}^+$  が存在し  $G$  は  $(k, \lambda)$  型の測度を持つ.

証明.  $k$  を固定し,  $m_0, \alpha_0 \in \mathbb{Z}^+$  を

$$(2/\pi) \alpha_0^{-\frac{1}{2}} + 4/m_0 < 2^{-k}$$

を満たす任意のものとする。まず最初に次のことを示す。

(A) すべての素数  $p \geq m_0$  に対して,  $G = G(p)$  は  $(k, \alpha_0)$  型の測度を持つ。

これを示すために, 素数  $p \geq m_0$  を固定して, 数列  $\{K_m\}_0^\infty$  を次式で定義する。

$$K_m = \ln [(\log p)^{-1} \{ (k \log 2) m + \log(m+1) \}]$$

これに対して,  $G$  の部分群の列  $\Sigma$  を

$$\Sigma = \{G_m\}_0^\infty; \quad G_m = \prod_{j \geq K_m} G^{(j)}$$

によって対応させる。このとき,  $\Omega(\Sigma)$  測度  $\mu_\omega$  が a.a.  $\omega \in \Omega$  に対して,  $(k, \alpha_0)$  型の測度であることが示せる。

次に, 次のことを示す。

(B). 各素数  $p$  に対して, ある  $\alpha = \alpha(k, p) \in \mathbb{Z}^+$  が存在して, 群  $G = G(p)$  は  $(k, \alpha)$  型の測度を持つ。

これを示すために, 素数  $p$  を任意に固定する。さて, すべての  $L, \alpha \in \mathbb{Z}^+$  に対して,

$$\sigma_L(\alpha; p) = p^{-L} \sum_{j_1=1}^p \cdots \sum_{j_L=1}^p \left\{ \frac{1}{L} \left| \sum_{l=1}^L \cos \frac{2\pi}{p} j_l \right| \right\}^\alpha$$

とおく。更に, 数列  $\{K'_m\}_0^\infty$  を

$$K'_m = K'_m(L) = \ln [(\log p)^{-1} \{ (k \log 2L) m + \log(m+1) \}]$$



で定義し,  $G$  の閉部分群の列  $\Sigma'$  を

$$\Sigma' = \{G_m\}_0^\infty; \quad G_m = \prod_{j \geq K_m} G^{(j)}$$

と定義する。この  $\Sigma'$  に対して, 確率空間  $(\Omega(L), B, h)$  を次の様に構成する:  $\Omega(L) = \prod_1^\infty G_m^L$ ;  $B$  は Borel field;  $h = \bigotimes_1^\infty h_m$ ,  $\langle \cdot \rangle$  に各  $h_m$  は  $G_m^L$  の Haar 測度。このとき  $\Omega(L)$  の元  $\omega$  は  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m, \dots)$  — ただし  $\omega_m = (\omega_m^1, \dots, \omega_m^L) \in G_m^L$  — の形に書ける。そこで, 各  $\omega \in \Omega(L)$  に対して,  $G$  上の 0 でない測度  $\mu' = \mu'_\omega \in M^+(G)$  を次の様に定義する:

$$\mu'_\omega = \bigotimes_1^\infty \mu'_m; \quad \mu'_m = L^{-1} \sum_1^L \Delta(\omega_m^j).$$

このとき, すべての測度  $\mu' = \mu'_\omega$  が定理 1 の条件 (a) を満たすことが示せる。又,  $L \in \mathbb{Z}^+$  を  $2/p^L < (2L)^{-k}$  となる  $L$  に選んでおくと, 十分大きな  $A \in \mathbb{Z}^+$  に対して

$$\sigma_L(A; p) < (2L)^{-k}$$

が成立する。これらのことから, 命題 (B) が得られる。

(A) と (B) から, 容易に定理 5 が得られる。(Q.E.D.).

## §6. 定理 1 の完全な証明.

補助定理 6-1.  $K$  を loc. compact abelian group,  $K_1$  をその compact な部分群とする。このとき, もし商群  $K/K_1$  がある正整数の組  $(k, A)$  に対して  $(k, A)$  型の測度を持て

ば、 $K$ も又  $(n, \mu)$  型の測度を持つ。

証明.  $g$  を  $K$  から  $K/K_1$  の上への自然な準同型写像とする。 $g$  は  $M(K/K_1)$  から  $M(K)$  の中への同型写像  $g'$  を生じる。このとき、 $g'$  は  $(n, \mu)$  型であるという測度の性質を保つ。このことから、命題は示される。(Q.E.D.)

補助定理 6-2.  $K$  を無限個の元より成る compact 群とする。このとき、 $K$  の閉部分群  $K_1$  が存在して、商群  $K/K_1$  は次のいずれかの群と同型である：(i)  $T$ , (ii)  $\prod_1^\infty Z(p_j)$ ,  $\infty$  に各  $p_j$  は素数であって  $p_j < p_{j+1}$ , (iii)  $U(p)$ ,  $p$  は素数, (iv)  $G(p)$ ,  $p$  は素数。

これは Varopoulos による。

定理 1 の証明.  $G$  を non-discrete,  $n$  を任意に固定した正の整数とする。 $\mu$  として、定理 2~5 に現われた  $\mu$  の中で、最大のものを取る。最初に、 $G$  が compact な閉部分群  $K$  を含む場合を考える。このとき補助定理 6-1, 6-2, 及び定理 2~5 から、 $K$  は  $(n, \mu)$  型の測度を持つ。 $K$  は  $G$  の閉部分群であるから、 $G$  自身も  $(n, \mu)$  型の測度を持つ。

次に  $G$  が上の様な  $K$  を含まない場合を考える。このとき、ある  $n \in \mathbb{Z}^+$  と compact 群  $K$  に対して、 $G$  は  $G_1 = \mathbb{R}^n \times K$

を閉部分群として含む。  $\mu$  を  $\mathbb{R}$  上の  $(h, \lambda)$  型の測度として、  $G_1 = \mathbb{R}^n \times K$  上に直積測度  $\lambda = \mu_1 \times \cdots \times \mu_m \times h_K$  を定義する、ここに  $\mu_j = \mu$ 。このとき、  $\lambda$  は  $G_1$  上の  $(h, \lambda)$  型の測度である。又、  $G_1$  は  $G$  の閉部分群であるから、  $\lambda$  は  $G$  上の  $(h, \lambda)$  型の測度でもある。 (Q. E. D.)

### 文 献

- [1] W. Rudin, Measure algebras on abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc., 65 (1959), pp. 227-247.
- [2] ———, Fourier-Stieltjes transforms of measures on independent sets, ibid, 66 (1960), pp. 199-202.
- [3] ———, Fourier analysis on groups, Interscience.
- [4] R. Salem, On sets of multiplicity for trigonometric series, Amer. Jour. Math., 64 (1942), pp. 531-538.
- [5] Yu. A. Izreider, The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution, Amer. Math. Soc. Translation, 1, 8 (1962), pp. 365-391.
- [6] N. Th. Varopoulos, Sets of multiplicity in loc. compact abelian groups, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16 (1966), pp. 123-158.